

Conseil canadien des examinateurs pour les arpenteurs-géomètres
Éléments du tronc commun
C 2: ESTIMATION DES MOINDRES CARRÉS ET ANALYSE DE DONNÉES

Guide d'études :

Les calculatrices programmables sont admises lors de cet examen; les candidats devront toutefois présenter toutes les formules utilisées, la substitution des valeurs utilisées, ainsi que toutes les valeurs intermédiaires à un degré deux fois plus poussé que celui requis pour fournir la réponse. Même si la réponse est numériquement la bonne, le maximum des points pourrait ne pas être attribué si ces informations ne sont pas fournies par le candidat. Les valeurs critiques des distributions statistiques sont fournies avec les questions d'examen.

1. Application des connaissances de la théorie des matrices, des statistiques et de l'estimation :
 - manipuler l'algèbre matricielle nécessaire à la compensation des observations,
 - linéarisation d'un système non-linéaire,
 - mettre en pratique ses connaissances des probabilités et des statistiques, et
 - démontrer sa compréhension des principes de l'estimation des moindres carrés et de leurs propriétés.

Questions type :

Q1.1. Définir et expliquer brièvement les termes suivants :

- a. Expectation
- b. Caractéristiques d'un estimateur sans biais
- c. Écart-type
- d. Valeur moyenne
- e. Variance
- f. Écart moyen quadratique
- g. Fidélité
- h. Justesse
- i. Redondance d'un système linéaire

Q1.2. Expliquer la différence entre :

- a. Fidélité et justesse
- b. Écart-type et écart moyen quadratique

Q1.3. Quels sont les avantages de la méthode des moindres carrés ?

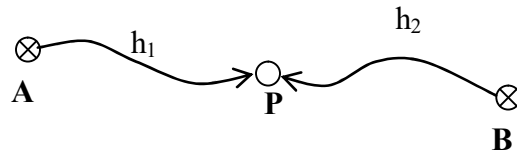
Voyez les chapitres sur le sujet dans "Analysis and Adjustment of Survey Measurements" par Mikhail and Gracie (1981).

2. Analyser les erreurs de mesure et la modélisation, effectuer la propagation aléatoire des erreurs et la pré analyse des mesures de levés :
 - démontrer sa compréhension des divers types d'erreurs et leurs caractéristiques,

- démontrer sa compréhension des divers types de modèles et leurs caractéristiques,
- appliquer la loi de la propagation d'erreur aléatoire afin de déterminer la matrice de variance et de covariance, et
- effectuer une pré analyse de mesures de levés.

Questions type :

Q2.1. Étant donné le réseau de nivellement ci-dessous où A et B sont des points connus, h_1 et h_2 sont deux mesures de variations altimétriques avec un écart type de σ_1 et σ_2 , respectivement et $\sigma_1 = 2 \sigma_2$. Déterminez la valeur de σ_1 et σ_2 afin que l'écart type de la solution altimétrique en P, en utilisant la compensation par la méthode des moindres carrés, soit égale à 2mm.



Réponse:

$$\sigma_1 = 2\sqrt{5} \text{ mm}, \sigma_2 = \sqrt{5} \text{ mm}$$

Q2.2. Étant donné la matrice variance – covariance du vecteur de mesure $\ell = \begin{bmatrix} \ell_1 \\ \ell_2 \end{bmatrix}$:

$$C_\ell = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

et les deux fonctions ℓ : $x = \ell_1 + \ell_2$ et $y = 3\ell_1$, déterminez $C_{xy}, C_{x\ell}, C_{y\ell}$

Réponse :

$$C_{xy} = 3, C_{x\ell} = (1 \quad 1), C_{y\ell} = (2 \quad 1)$$

Q2.3. Question 3: Expliquez la différence entre erreurs aléatoires et erreurs systématiques.

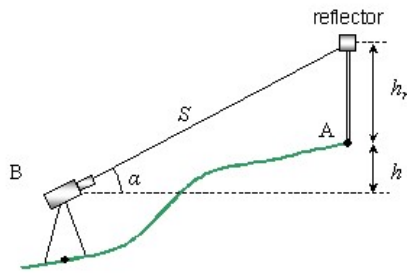
Q2.4. L'erreur d'un arpenteur due uniquement à la lecture (un sigma) est établie à 1,5" lorsque les observations sont effectuées avec un instrument en particulier. Après avoir pointé la même cible lointaine à plusieurs reprises avec le même instrument, l'arpenteur établit que l'erreur combinée due à la lecture et au pointage est de 2,6". Quelle est l'erreur de pointage de l'arpenteur ?

Réponse :

$$2,1''$$

Q2.5. La hauteur d'une station d'arpentage (A) au dessus de l'instrument en (B) est requise avec une précision de 0,01m à partir de la mesure de la distance de la pente s , de l'angle vertical α et de la hauteur de la cible h_r .

$$h = s \sin(\alpha) - h_r$$



- Estimez σ_s , σ_α , σ_{hr} en tenant pour acquis des précisions égales et des valeurs approximatives de $s = 400\text{m}$ et $\alpha = 30^\circ$.
- Si σ_α est limité à $5,0''$ par l'instrument par exemple, effectuez une nouvelle évaluation σ_s , σ_{hr} qui tient compte de cette limitation en σ_α .

Réponse :

$$\sigma_s = 0,0115\text{m}, \sigma_\alpha = 3,4'', \sigma_{hr} = 0.006\text{m}$$

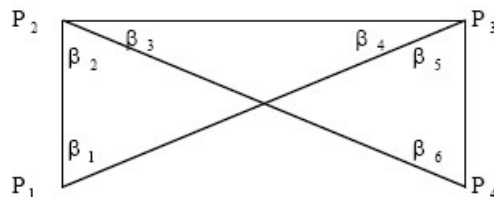
$$\sigma_s = 0,008\text{m}, \sigma_{hr} = 0,004\text{m}$$

Voir les chapitres 2, 6 et 7 de "Analysis and Adjustment of Survey Measurements" par Mikhail and Gracie (1981)

- Formuler des problèmes de compensation des moindres carrés (conditions, paramétriques et combinés):
 - formuler des modèles de compensation paramétriques (fonctionnels et stochastiques),
 - formuler des modèles de compensation conditionnels (fonctionnels et stochastiques), et
 - formuler des modèles de compensation combinés (fonctionnels et stochastiques).

Questions type :

- Expliquer la différence entre la modélisation fonctionnelle et la modélisation stochastique
- Quel est le critère de la méthode des moindres carrés ?
- Les angles illustrés dans le tableau suivant ont été mesurés à l'aide d'un théodolite et leurs valeurs observées ainsi que les écarts-type sont notés inscrits plus bas. Formulez les modèles fonctionnels et stochastiques afin de déterminer les valeurs compensées de ces angles en utilisant l'approche conditionnelle.



Angle	Valeurs observées	Écart-type
β_1	$44^\circ 50' 44''$	$2,6''$

β_2	46° 10' 25"	1,5"
β_3	45° 55' 12"	1,5"
β_4	43° 04' 03"	1,5"
β_5	48° 32' 45"	1,5"
β_6	42° 27' 42"	2,6"

Réponse :

Angle	Valeurs compensées
β_1	44° 50' 27"
β_2	46° 10' 19"
β_3	45° 55' 11"
β_4	43° 04' 02"
β_5	48° 32' 50"
β_6	42° 27' 57"

Q1.1. Prenez pour acquis que les points P1 et P2 de la Question 3 sont deux points de contrôle dont les coordonnées sont indiquées dans le tableau suivant. Établissez les modèles fonctionnels et stochastiques qui vous serviront à déterminer les coordonnées des points P3 et P4 en utilisant une approche paramétrique.

Points de contrôle	X (m)	X (m)
P1	0.0	0.0
P2	1000.0	0.0

Voir les chapitres 3, 4 et 9 de “Analysis and Adjustment of Survey Measurements” par Mikhail and Gracie (1981))

4. Calculer les dérivées de compensation à partir de cas divers et effectuer des compensations par la méthode des moindres carrés s’appliquant à des problèmes géomatiques tels la mise à niveau, le cheminement graphique, et les réseaux de triangulation et de trilatération :
 - Calculer les dérivées de compensation paramétrique,
 - Calculer les dérivées de compensation conditionnelle,
 - Calculer les dérivées de compensation combinée, et
 - Les appliquer à des problèmes géomatiques tels que le nivellement, le cheminement et les réseaux de triangulation et de trilatération.

Questions type :

Q4.1. Étant donné la modélisation mathématique suivante

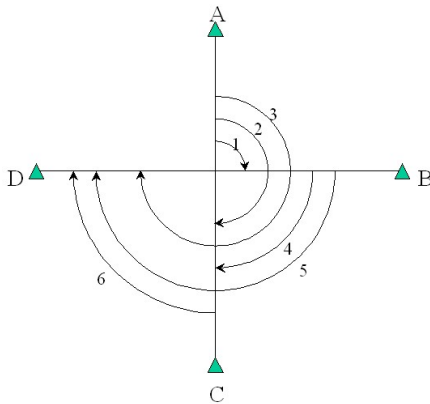
$$f(\ell, x) = 0 \quad C_\ell \quad C_x$$

ou f est le vecteur de la modélisation mathématique, x est le vecteur de paramètres inconnus et C_x est la matrice de variance, ℓ est le vecteur des observations et C_ℓ sa matrice de variance.

- Effectuez la linéarisation du modèle
- Exprimez sa fonction de minimisation
- Calculez l'équation normale des moindres carrés
- Calculez la solution des paramètres inconnus selon la méthode des moindres carrés.

Q4.2. Effectuez une compensation afin d'estimer x en utilisant une observation des angles l mesurée selon un degré de précision $\sigma = 1''$ et, étant donnée le tableau ci-bas.

$$x^T = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_4 \\ \alpha_6 \end{bmatrix} \quad l^T = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \end{bmatrix}$$



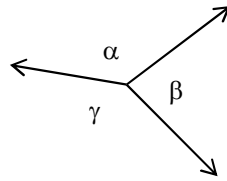
Angle	Observations
α_1	89°59'58.3''
α_2	180°00'01.4''
α_3	270°00'00.2''
α_4	89°59'59.8''
α_5	179°59'57.0''
α_6	90°00'03.1''

Réponse :

Angle	Valeurs compensées
α_1	90° 00' 0.35''
α_4	89° 59' 59.15''
α_6	90° 00' 0.55''

Q4.3. Étant donné les angles mesurés à une station ainsi que leurs écarts-type, appliquez la méthode de compensation selon la méthode des moindres carrés paramétrique à la solution du problème.

Angle	Mesure	Écart-type
α	134°38'56"	6,7"
β	83°17'35"	9,9"
γ	142°03'14"	4,3"



Réponse :

Angle	Valeurs compensées
α	134°39'0.2"
β	83°17'44.1"
γ	142°03'15.7"

Voir les chapitres 3, 4 et 9 de “Analysis and Adjustment of Survey Measurements” par Mikhail and Gracie (1981))

5. Évaluer la qualité des solutions de compensation (facteur de variance, matrice de variance et de covariance, ellipse d'erreur):
 - Évaluer le facteur de variance,
 - Calculer la matrice variance-covariance des paramètres obtenus à partir d'une compensation obtenue par la méthode des moindres carrés, et
 - Démontrer sa compréhension du concept d'ellipse d'erreur et calculer ses principaux axes et son orientation.

Questions type:

- Q5.1. Question 1: Étant donné la matrice variance-covariance des coordonnées horizontales (x, y) d'une station d'arpentage, déterminez le demi grand-axe, le demi petit-axe et l'orientation de l'ellipse d'erreur normale ou standard de cette station.

$$C_x = \sigma_0^2 \begin{bmatrix} 0.380 & 0.025 \\ 0.025 & 0.510 \end{bmatrix}$$

ou $\sigma_0 = 2\text{cm}$.

Réponse :

Demi grand-axe = 1,43cm, demi petit-axe = 1,23cm, orientation = -10°31'08"

- Q5.2. Étant donné la mesure angulaire d'un triangle plan ainsi que le poids de ces angles, calculez le facteur de variance, la matrice variance-covariance ainsi que les écarts-type des angles compensés.

Angle	Mesure	Poids
	41°33'45"	1.00
	78°57'55"	0.67
	59°27'50"	0.50

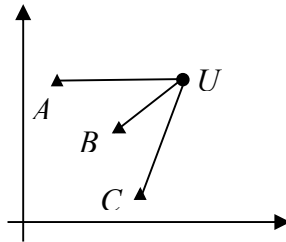
Réponse :

la facteur de variance est 14.15", $C_{\hat{\ell}} = \begin{bmatrix} 155.74 & -66.56 & -89.18 \\ -66.56 & 199.67 & -133.11 \\ -89.18 & -133.11 & 222.30 \end{bmatrix}$,

$$\sigma_{\hat{\ell}_1} = 12.50'' \quad \sigma_{\hat{\ell}_2} = 14.13'' \quad \sigma_{\hat{\ell}_3} = 14.91''$$

Q5.3. Dans le réseau de trilatération illustré ci-bas, U est un point inconnu et A, B et C sont trois points de contrôle dont les coordonnées sont :

Points de contrôle	A	B	C
X (m)	865,4	2432,55	2865,22
Y (m)	4527,15	2047,25	27,15



Tenez pour acquis que les distances d_{AU} , d_{BU} , et d_{CU} sont mesurées avec la même précision et que leurs valeurs observées sont de 6049,00m, 4736,83m et 5446,29m, respectivement.

- Estimez les coordonnées du point U et de sa matrice variance-covariance
- Calculez le demi grand-axe et le demi petit-axe ainsi que l'orientation de l'ellipse d'erreur standard pour les points en U.
- Calculez le facteur de variance.

Réponse :

a. $X_U = 6861,32\text{m}$, $Y_U = 3727,82\text{m}$; $C_x = \begin{bmatrix} 0.0063 & -0.0073 \\ -0.0073 & 0.0249 \end{bmatrix}$

b. demi grand-axe = 0,1656m, demi petit-axe = 0,0615m, orientation = 109°03'54"

c. 0,01m

Voir les chapitres 6 et 8 de "Analysis and Adjustment of Survey Measurements" par Mikhail and Gracie (1981)

6. Effectuez les tests statistiques sur les moyennes et variances afin d'isoler et définir les valeurs aberrantes des observations (normale, chi-carré, distributions Student (t) et F , hypothèses statistiques et erreurs de type I et II) :
- Effectuer les test statistiques des moyennes et variances afin d'isoler et définir les valeurs aberrantes des observations.
 - Déterminer les intervalles de confiance des paramètres compensés.
 - Choisir les méthodes de test appropriées (normale, chi-carré, distributions Student (t) et F distributions), et
 - déterminer le niveau de confiance et la probabilité d'erreurs des décisions statistiques (niveau de signification, puissance du test, erreurs de type I et II).

Questions type :

Q6.1. Définir ou expliquer les termes suivants :

- Hypothèse de différence nulle et hypothèse alternative
- Coefficient de corrélation
- Erreurs de type I et II lors de tests statistiques

Q6.2. Un angle est mesuré à dix reprises. Chaque mesure est indépendante et effectuée avec la même précision. L'écart-type de l'échantillonnage est $s = 7,3''$. Effectuez un test de l'hypothèse, à un niveau de signification de 5% que l'écart-type de la population σ des mesures est de $2,0''$ contre l'alternative que σ n'est pas $2,0''$.

Réponse :

$\sigma = 2,0''$ est rejeté à un niveau de signification de 5%.

Q6.3. Une base d'une longueur calibrée de (μ) 1153,00m est mesurée à 5 reprises. Chaque mesure est indépendante et effectuée avec la même précision. La moyenne de l'échantillon ($\bar{x}$) et l'écart-type de l'échantillon (s) sont calculés à partir des mesures : $\bar{x} = 1153,39\text{m}$ $s = 0,06\text{m}$

- Décrivez les étapes principales du test de la valeur moyenne.
- Effectuez un test à un niveau de confiance de 10% si la distance mesurée est différente de manière appréciable de la distance calibrée.

Réponse :

- la distance mesurée est différente de la distance calibrée à un niveau de confiance de 10%.

Voir le chapitre 8 de "Analysis and Adjustment of Survey Measurements" par Mikhail and Gracie (1981)